Canguru sem fronteiras 2006

Categoria: Estudante **Duração:1h15**

Destinatários: alunos do 12º ano de Escolaridade

Não podes usar calculadora. Há apenas uma resposta correcta em cada questão. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão errada, és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

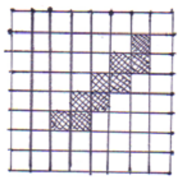
1. Qual é o maior dos seguintes números?

A) 2006×2006 B) 2005×2007 C) 2004×2008 D) 2003×2009 E) 2002×2010

2. Com quantos zeros termina o produto dos primeiros 2006 números primos?

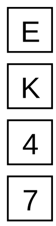
A) 0 B) 1 C) 2 D) 9 E) 26

3. Considera o perímetro e a área da região correspondente aos quadrados cinzentos. Quantos mais quadrados poderás pintar de cinzento, para aumentar a área da região a cinzento mas sem aumentar o seu perímetro?



A) 0 B) 7 C) 18 D) 12 E) 16

4. Em cima de uma mesa estão quatro cartões, como se ilustra na figura. Cada cartão tem uma letra numa das suas faces e um número na outra face. O Pedro disse: "Para cada cartão na mesa é verdade que, existindo uma vogal numa das faces, então existe um número par na outra face." Qual é o menor número de cartões que a Alice tem de virar para verificar se o Pedro está a dizer a verdade?

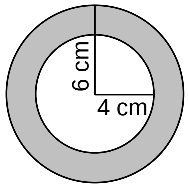


A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5. Dois comboios, com o mesmo comprimento, deslocam-se em direcções contrárias. O primeiro comboio desloca-se a 100 km/h e o segundo a 120 km/h. Um passageiro que viaja no segundo comboio observa que o primeiro comboio demora 6 segundos a passar à sua frente. Quanto tempo demora a passar o segundo comboio à frente de um passageiro que viaja no primeiro comboio?

A) 5 seg B) 6 seg C) entre 6 a 7 seg D) 7 seg E) mais de 7 seg

6. A Susana tem duas medalhas feitas do mesmo material. As medalhas têm a mesma espessura e peso. Uma delas tem a forma de um anel construído a partir de dois círculos com raios 6 cm e 4 cm (vê a figura). A segunda medalha tem a forma de círculo. Qual é o raio da segunda medalha?



A) 4 cm B) $2\sqrt{6}$ cm C) 5 cm D) $2\sqrt{5}$ cm E) $\sqrt{10}$ cm

7. A diferença entre quaisquer dois números consecutivos da lista *x, y, z, w, t* é a mesma. Se y=5.5 e t=10, qual é o valor de x?

A) 0.5 B) 3 C) 4 D) 4.5 E) 5

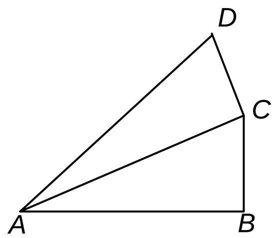
8. Se $4^x=9$ e $9^y=256$, então xy é igual a

A) 2006 B) 48 C) 36 D) 10 E) 4

9. Considera todos os números inteiros com 9 algarismos formados pelos algarismos 1,2,…,9. Escreve cada um destes números por folha e coloca todas as folhas resultantes numa caixa. Qual é o número mínimo de folhas que precisas tirar da caixa se quiseres ter a certeza de que há pelo menos dois números com o mesmo algarismo na primeira posição?

A) 9! B) 8! C) 72 D) 10 E) 9

10. No diagrama, [AB] tem comprimento 1; $\angle ABC = \angle ACD = 90°$; $\angle CAB = \angle DAC = \theta$. Qual é a medida do comprimento de [AD]?



A) $\cos\theta + \tan\theta$ B) $\dfrac{1}{\cos 2\theta}$ C) $\cos^2\theta$

D) $\cos 2\theta$ E) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

Problemas de 4 pontos

11. Qual das seguintes expressões define uma função cujo gráfico tem o eixo dos *yy* como eixo de simetria?

A) $y = x^2 + x$ B) $y = x^2\sin x$ C) $y = x\cos x$ D) $y = x\sin x$ E) $y = x^3$

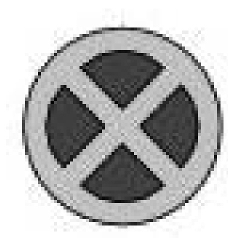
12. Numa roleta da sorte há 37 números: 0 e os números naturais de 1 a 36. Qual é a probabilidade de a bola cair num número primo?

A) 5/18 B) 11/37 C) 11/36 D) 12/37 E) 1/3

13. O resto da divisão do número 1001 por um outro número de um algarismo é 5. Qual é o resto da divisão do número 2006 pelo mesmo número de um algarismo?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. O raio do sinal de trânsito é 20 cm. Cada uma das partes escuras é um quarto de um círculo. A área dos quatro quartos é igual à área da parte clara do sinal. Qual é o raio deste círculo?

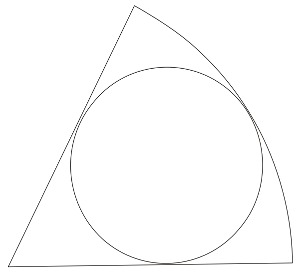


A) $10\sqrt{2}$ cm B) $4\sqrt{5}$ cm C) 20/3 cm

D) 12,5 cm E) 10 cm

15. São dados três números primos *a, b, c* com $a > b > c$. Se $a+b+c=78$ e $a-b-c=40$ então abc é igual a

A) 438 B) 590 C) 1062 D) 1239 E) 2006



16. A razão entre os raios do sector circular e do círculo na figura é 3:1. A razão entre as áreas é:

A) 3:2 B) 4:3 C) 5:3 D) 6:5 E) 5:4

17. Dezasseis equipas participam numa liga de Voleibol. Cada equipa defronta cada uma das restantes equipas. Em cada jogo, a equipa vencedora ganha 1 ponto e a equipa derrotada 0 pontos. Não há empates. Depois de todos os jogos terem decorrido, as pontuações formam uma progressão aritmética. Quantos pontos teve a equipa em último lugar?

A) 3 B) 2 C) 1 D) A situação descrita não é possível

E) A resposta é um outro número

18. No ano passado, o coro da escola tinha mais 30 rapazes do que raparigas. Este ano, o número de pessoas do coro aumentou em 10%: o número de raparigas aumentou em 20% e o número de rapazes em 5%. Quantas pessoas tem o coro este ano?

A) 88 B) 99 C) 110 D) 121 E) 132

19. Os quadrados da tabela 4×4 estão pintados de preto e de branco, como mostra a Fig. 1. Um movimento permite-nos trocar quaisquer dois quadrados posicionados na mesma linha ou na mesma coluna.

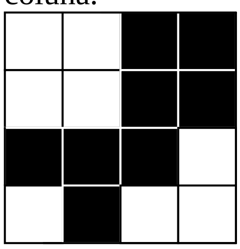


Fig. 1

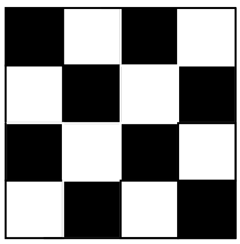
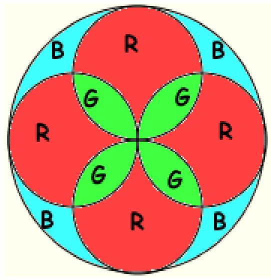


Fig. 2

Qual é o menor número de movimentos necessários para obter a Fig. 2?

A) não é possível B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20. Numa igreja, existe um vitral como se ilustra na figura, onde as letras *R*, *G* e *B* representam vidro vermelho, verde e azul, respectivamente. Sabendo que foram usados 400 cm^2 de vidro verde, quantos cm^2 de vidro azul foram necessários?



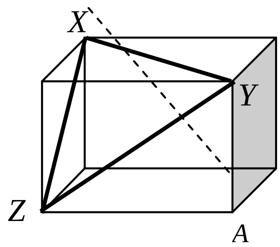
A) 396 B) 400 C) 120π D) $90\sqrt{2}\pi$ E) 382

Problemas de 5 pontos

21. Sabendo que *a* e *b* são ambos números maiores do que 1, qual das seguintes fracções toma o maior valor?

A) $\dfrac{a}{b-1}$ B) $\dfrac{a}{b+1}$ C) $\dfrac{2a}{2b+1}$ D) $\dfrac{2a}{2b-1}$ E) $\dfrac{3a}{3b+1}$

22. As medidas dos comprimentos dos lados do triângulo [*XYZ*] são 8 cm, 9 cm e $\sqrt{55}$ cm. Determina a medida do comprimento da diagonal [*XA*] do paralelepípedo da figura.



A) $\sqrt{90}$ cm B) 10 cm C) $\sqrt{120}$ cm D) 11 cm E) $\sqrt{200}$ cm

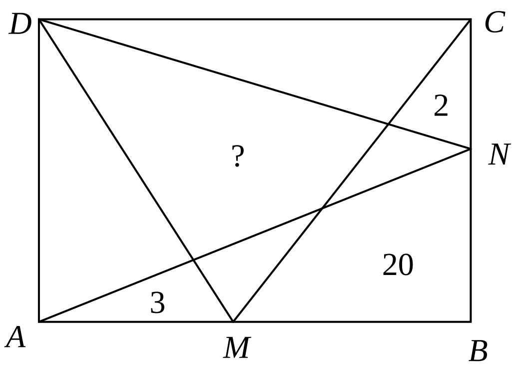
23. Para quantos valores reais do parâmetro b é que a equação $x^2 - bx + 80 = 0$ tem duas soluções diferentes, inteiras, positivas e pares?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) uma infinidade

24. Quantos subconjuntos não vazios de {1, 2, 3, …, 12} existem, de modo a que a soma do maior com o menor elemento seja 13?

A) 1024 B) 1175 C) 1365 D) 1785 E) 4095

25. Considera os pontos *M* e *N* nos lados [*AB*] e [*BC*] do rectângulo [*ABCD*], respectivamente. O rectângulo é então dividido em várias partes, como mostra a figura. As áreas de três dessas partes são dadas na figura. Determina a área do quadrilátero marcado com “?”.



A) 20 B) 21 C) 25 D) 26

E) Não é dada informação suficiente.

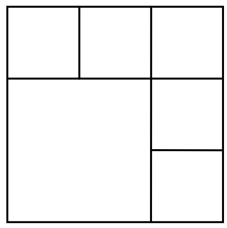
26. Um teste é composto por dez questões, cada uma das quais tem de ser respondida com "a" ou "b". Se responderes a quaisquer 5 questões "a" e a quaisquer 5 questões "b", terás pelo menos 4 respostas correctas. Quantas soluções de resposta existem com esta propriedade?

A) 5^5 B) 252 C) 2 D) 10 E) 22

27. O Paulo removeu um número de uma lista de dez números naturais consecutivos. A soma dos números restantes é 2006. O número removido foi

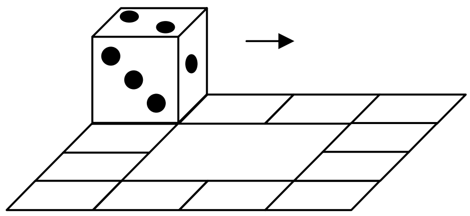
A) 218 B) 219 C) 220 D) 225 E) 227

28. De quantas maneiras podem ser escritos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6 nos quadrados na figura (um em cada quadrado) de modo a que não haja quadrados adjacentes em que a diferença entre os números seja 3? (Os quadrados que tenham somente um vértice em comum não são considerados adjacentes.)



A) 3×2^5 B) 3^6 C) 6^3 D) 2×3^5 E) 3×5^2

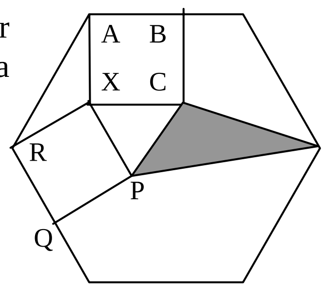
29. Um dado encontra-se na posição indicada na figura. Pode rolar ao longo de um caminho de 12 quadrados como se mostra. Quantas voltas ao longo do caminho terá o dado de dar de forma a voltar à sua posição inicial com todas as faces na posição inicial?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

E) É impossível fazer tal coisa.

30. Se a medida do comprimento de cada lado do hexágono regular for $\sqrt{3}$ e [*XABC*] e [*XPQR*] forem quadrados, qual será a área da região a sombreado?



A) $\dfrac{5-\sqrt{3}}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ E) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$